Marius Burtea **Georgeta Burtea**
Geta Bercaru, Bogdana Ciudin, Cristina Biţă, Crina Bogdan, Cristina Dragomir, Lenuţa Dragomir, Carmen Dumitru, Elena Fiţu, Maria Ghiban, Florinela Ionescu, Viorica Lazăr, Tudor Eugen Lupu, Tiberiu Marinescu, Aurelian Nedelcu, Mihaela Negraru, Paula Nica, Adela Corina Oţelea, Cristian Pârvucică, Cornelia Savu, Claudia Stoica, Nicoleta Stoica, Cezarina Şiperco

Auxiliarul şcolar a fost aprobat prin OMEN nr. 3022/08.01.2018

CLASA a XII-a

MATEMATICĂ

Probleme şi exerciţii
Teste

- inele de polinoame
- integrala definită
- aplicaţii ale integralei definite
- probleme pregătitoare bacalaureat

profilul tehnic

CAMPION

Bucureşti 2018

CUPRINS

CAPITOLUL I INELE DE POLINOAME

1. FORMA ALGEBRICĂ A POLINOAMELOR

Breviar teoretic

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ.

- Un monom de gradul $n \in \mathbb{N}$ cu coeficienţi în K are forma $f_n = a_n X^n$, cu $a_n \in K^*$.
- Două monoame $f_m = a_m X^m$ şi $f_n = a_n X^n$ sunt egale dacă $m = n$ şi $a_m = a_n$.
- Un polinom de gradul $n \in \mathbb{N}$ cu coeficienţi în K are forma algebrică $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_n X^n$, unde $a_0, a_1, ..., a_n \in K$ şi $a_n \in K^*$.
- Elementele $a_0, a_1, ..., a_n \in K$ se numesc **coeficienţii** polinomului f.
- Monomul $f_n = a_n X^n$ se numeşte monom dominant al polinomului.
- Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în corpul K se notează $K[X]$.
- Două polinoame $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ şi $g = b_0 + b_1 X + ... + b_m X^m$, sunt egale dacă au acelaşi grad, $m = n$, şi $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, ..., a_m = b_n$.
- Numărul $f(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + ... + a_n \alpha^n$ se numeşte **valoarea polinomului** f în $\alpha \in K$.
- Funcţia $f : K \to K, f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ se numeşte **funcţia polinomială** ataşată polinomului f.
- Polinomul cu toţi coeficienţii nuli se numeşte polinom nul.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. Să se determine în funcţie de $m \in \mathbb{R}$, gradul polinomului $f \in \mathbb{R}[X]$, în cazurile:

a) $f = 2 + (m-1)X + (m^2 - 1)X^2$. b) $f = 3m + (m-2)X^2 + (m^2 - 3m + 2)X^3$.

Soluţie

a) Polinomul este de grad 2 dacă $m^2 - 1 \neq 0$, deci dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Pentru $m = 1$ avem că $f = 2 + 0 \cdot X + 0 \cdot X^2 = 2$, deci $\text{grad}(f) = 0$.

Pentru $m = -1$ se obţine că $f = 2 - 2X + 0 \cdot X^2 = 2 - 2X$ şi $\text{grad}(f) = 1$.

b) Ecuaţia $m^2 - 3m + 2 = 0$ are soluţiile reale $m \in \{1, 2\}$. Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, grad $f = 3$.

Pentru $m = 1, f = 3 - X^2$ şi $\text{grad}(f) = 2$.

Pentru $m = 2, f = 6$ şi $\text{grad}(f) = 0$.

2. Să se determine gradul polinomului $f \in \mathbb{Z}_n[X]$, în cazurile:

a) $f = 2 + \hat{3}X + (m^2 + \hat{1})X^2 + (m^2 + m + 4)X^3$, $n = 5$;

b) $f = m + (m - \hat{3})X + (m^7 - m)X^3$, $n = 7$.

Soluţie

a) În $\mathbb{Z}_5$ ecuația $m^2+m+4=\hat{0}$ are soluția $m=2$. Dacă $m\in\{\hat{0},\ \hat{1},\ \hat{3},\ 4\}$, $\text{grad}(f)=3$, iar pentru $m=2$, $f=2+\hat{3}X$ și $\text{grad}(f)=1$.

b) În $\mathbb{Z}_7$ ecuația $m^7-m=0$ are soluțiile $m\in\mathbb{Z}_7$. Pentru $m\in\mathbb{Z}_7\setminus\{\hat{3}\}$, $f=m+(m-\hat{3})X$ și $\text{grad}(f)=1$, iar pentru $m=\hat{3}$, $f=\hat{3}$ și grad $(f)=0$.

3. Să se calculeze valoarea polinomului f în cazurile:

a) $f\in\mathbb{R}[X], f=2+7X+11X^2,\ \alpha=-3$; b) $f\in\mathbb{R}[X], f=2+\sqrt{3}X+\sqrt{27}X^3,\ \alpha=\sqrt{3}$;

c) $f\in\mathbb{C}[X], f=X^4+X^2+1,\ \alpha=-\mathrm{i}$; d) $f\in\mathbb{Z}_5[X], f=X^5-X+\hat{1},\ \alpha=4$.

Soluție

a) Valoarea polinomului este $f(-3)=3+7\cdot(-3)+11\cdot(-3)^2=80$.

b) $f(\sqrt{3})=2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+3\sqrt{3}\cdot3\cdot\sqrt{3}=2+3+27=32$.

c) $f(-\mathrm{i})=(-\mathrm{i})^4+(-\mathrm{i})^2+1=1-1+1=1$.

d) $f(4)=(4)^5-4+\hat{1}=\hat{1}$.

4. Să se determine polinoamele $f\in K[X]$, în condițiile date:

a) $f=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X],\ f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(-1)=1$;

b) $f=aX^3+bX^2+c\in\mathbb{C}[X],\ f(1)=3,\ f(-1)=1,\ f(\mathrm{i})=-\mathrm{i}$;

c) $f=X^3+2X^2+bX+a\in\mathbb{Z}_3[X],\ f(2)=2, f(\hat{1})=2$.

Soluție

a) Se obține că $f(0)=0+0+c=c$, $f(1)=a+b+c$ și $f(-1)=a-b+c$. Rezultă sistemul de ecuații $\begin{cases}c=1\\a+b+c=3\\a-b+c=1\end{cases}$ cu soluțiile $a=b=c=1$. Așadar, polinomul este $f=X^2+X+1$.

b) Se obține că $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=-a+b+c$ și $f(\mathrm{i})=-a\mathrm{i}-b+c$ și rezultă sistemul de ecuații $\begin{cases}a+b+c=3\\-a+b+c=1\\-a\mathrm{i}-b+c=-\mathrm{i}\end{cases}$. Prin scăderea primelor două ecuații se obține că $a=1$. Substituind $a=1$ în sistem vom avea $\begin{cases}b+c=2\\-b+c=0\end{cases}$ cu soluția $b=c=1$. Așadar $f=X^3+X^2+1$.

c) Avem că $f(2)=2+2+2b+a=2$ și $f(\hat{1})=\hat{1}+2+b+a=2$. Se obține sistemul de ecuații $\begin{cases}a+2b=-2\\a+b=-\hat{1}\end{cases}$, cu soluțiile $b=2,\ a=\hat{0}$, deci $f=X^3+2X^2+2X$.

5. Se consideră $f=(X+\mathrm{i})^3+(X-\mathrm{i})^3\in\mathbb{C}[X]$. Să se calculeze $f\left(\text{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)$ și $f\left(\text{ctg}\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Soluție

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$. Avem $f(\alpha)=(\alpha+\mathrm{i})^3+(\alpha-\mathrm{i})^3=\alpha^3+3\alpha^2\mathrm{i}+3\alpha\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\alpha^3-3\alpha^2\mathrm{i}+3\alpha\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3=$ $=2\alpha^3-6\alpha$. Dar $\alpha=\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ și rezultă că $f\left(\sqrt{3}\right)=2\cdot\sqrt{3}\cdot 3-6\sqrt{3}=0$. Pentru $\alpha=\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ se obține $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3}-6\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}-2\sqrt{3}=-\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

6. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f=X^2+(a+4)X+b+1$, $g=(a+b+6)X^2+3X-3$ sunt egale.

Soluție

Punem condiții ca toți coeficienții polinomului f să fie egali, respectiv cu coeficienții lui g.

Rezultă egalitățile: $\begin{cases} a+b+6=1 \\ a+4=3 \\ b+1=-3 \end{cases}$ cu soluțiile $a=-1$, $b=-4$, deci $f=g=X^2+3X-3$.

7. Să se determine polinoamele $f \in \mathbb{R}[X]$ de gradul doi știind că $f(1+x)=f(2+x)+3x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $f(3)=0$.

Soluție

Fie $f=aX^2+bX+c$. Se obține că $f(1+x)=a(1+x)^2+b(1+x)+c=$ $=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$, $f(2+x)=a(2+x)^2+b(2+x)+c=ax^2+4ax+4a+2b+bx+c=$ $=ax^2+(4a+2b)x+4a+2b+c$.

Se obțin egalitățile: $ax^2+(2a+b)x+a+b+c=ax^2+(4a+2b)x+4a+2b+c+3x$ și rezultă sistemul de ecuații $\begin{cases} 2a+b=4a+2b+3 \\ a+b+c=4a+2b+c \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2a+b=-3 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ cu soluțiile $a=3$, $b=-9$, $c \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $f=3X^2-9X+c$. Din condiția $f(3)=0$ se obține că $f(3)=c=0$. Așadar $f=3X^2-3X$.

Exerciții și probleme propuse

1. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f=(m^2-3m+2)X^3+2X^2-(m+5)X+1$. Să se determine $m \in R$ astfel încât grad(f) = 2.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f=\left(m^2+1\right)X^5+(m+\mathrm{i})X^4+X^3-2X\mathrm{i}+3\mathrm{i}$. Să se determine $m \in \mathbb{C}$ astfel încât $grad(f)=3$.

3. Să se discute în funcție de $m \in \mathbb{R}$, gradul polinoamelor :

a) $f=(m-2)X^3+mX^2-5X+3,\ f \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f=(m^2-4m+3)X^4+(m-1)X^3+X+1,\ f \in \mathbb{R}[X]$.

4. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X], f=(m^2-1)X^2+2miX-8$ și $g=(m^4-16)X^3+(m+5i)X^2-3X+m$. Pentru ce valori ale lui $m \in \mathbb{C}$, două polinoame au același grad?

5. Să se determine parametrii a, b, c, d, e, astfel încât polinomul *f* să fie egal cu polinomul *g*, dacă:

a) $f=2X^4+aX^3-5X^2+bX-1$ și $g=cX^4-10X^3+dX^2+8X-e$, $f,g\in\mathbb{R}[X]$;

b) $f=X^3+7X^2-3X+6, g=aX^3+(a+b-1)X^2+(b-2c)X+a+c$, $f,g\in\mathbb{R}[X]$;

c) $f=\hat{3}X^2+(a+\hat{2}b)X+\hat{3}c+b$ și $g=(a+b)X^2+\hat{2}X+\hat{2}$, $f,g\in\mathbb{Z}_5[X]$.

6. Să se determine $a,b\in\mathbb{C}$ pentru care polinoamele $f,g\in\mathbb{C}[X]$,
$f=(2a+b)X^3+(a-2b)X^2+(a-2)X+1-b$, $g=(3a+2b)X^3-3bX^2-(2a+b)X+3-a$ sunt egale.

7. Se consideră polinoamele: $f=\hat{5}X^4+X^3+\hat{3}X^2+\hat{6}X+\hat{2}$ și $g=\hat{6}X^2+\hat{4}X+\hat{1}$, $f,g\in Z_7[X]$. Să se calculeze $f(\hat{1})+g(\hat{3})$.

8. Să se determine un polinom $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=aX+b$ știind că:

a) $f(1)=-5$ și $f(-2)=7$; b) $f(-1)=4$ și $f(3)=12$.

9. Să se determine un polinom $f\in\mathbb{R}[X]$, $\text{grad}(f)=2$, astfel încât:

a) $f(0)=-3; f(1)=2; f(2)=1$; b) $f(1)=5; f(-1)=-3; f(3)=21$.

10. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X], f=2X^4+aX^3+3X^2+bX+c$. Să se afle $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $f(1)+f(-1)=56$.

11. Se consideră polinomul $f=50X^{50}+49X^{49}+...+2X^2+X$, $f\in\mathbb{R}[X]$.

a) Să se calculeze $f(1)$; b) Să se calculeze $f(1)+f(-1)$.

12. Fie $M=\{f\in Z_2[X] \mid f=X^2+aX+b\}$. Să se determine numărul de elemente al mulțimii M. Precizați care sunt aceste elemente.

13. Câte elemente are mulțimea $M=\{f\in\mathbb{Z}_5[X] \mid f=aX^2+bX+c, a<b<c\}$? Precizați care sunt acestea.

14. Să se determine un polinom $f\in\mathbb{R}[X]$, $grad(f)=2$:
$f(1)+f(2)+...+f(n)=n^3+2n^2, (\forall)n\in\mathbb{N}$.

15. Să se determine un polinom $f\in R[X]$, $grad(f)=1$ astfel încât $f(x^2)=(f(x))^2$, $(\forall)x\in R$.

16. Să se determine polinoamele $f\in\mathbb{Z}_3[X]$ de gradul 3 dacă $f(\hat{0})=f(\hat{1})=f(2)$.

17. Să se determine funcțiile polinomiale asociate polinoamelor :

a) $f\in\mathbb{Z}_3[X], f=X^3-X$; b) $f\in\mathbb{Z}_5[X], f=X^5-X$;

c) $f\in\mathbb{Z}_5[X], f=X^4+X^2+X+1$

18. Să se determine polinoamele de gradul 4 în $\mathbb{Z}_3[X]$, care au aceeși funcție polinomială cu:

a) $f=X^2+X+\hat{1}$; b) $f=X^2-2X+2$.

19. Fie $f\in\mathbb{R}[X], f=X^3-6X+8$. Să se calculeze $f(a)$ pentru $a=\sqrt[3]{4-2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{4+2\sqrt{2}}$.

2. ADUNAREA ȘI ÎNMULȚIREA POLINOAMELOR

Breviar teoretic

- Fie $f, g \in K[X]$ monoame de gradul n, $f = a_n X^n$, $g = b_n X^n$. Suma monoamelor f și g este monomul $h \in K[X]$, $h = f + g = (a_n + b_n) X^n$.
- Dacă $f, g \in K[X]$ sunt monoame, $f = a_p X^p$, $g = b_k X^k$, atunci $f + g = a_p X^p + b_k X^k$.
- Fie $f, g \in K[X]$ polinoame de gradul n, respectiv m, $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, $g = b_0 + b_1 X + ... + b_m X^m$. Suma coeficienților f și g este polinomul $h \in K[X]$, $h = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + (a_2 + b_2) X^2 + ... + (a_p + b_p) X_p + ...$, unde $a_i = 0$, dacă $i > n$ și $b_j = 0$, dacă $j > m$.
- Are loc relația $\text{grad}(f + g) \le \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$.
- Produsul monoamelor $f, g \in K[X]$, $f = a_n X^n$, $g = b_m X^m$ este monomul $h \in K[X]$, $h = a_n b_m X^{n+m}$.
- Produsul polinoamelor $f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ și $g = b_0 + b_1 X + ... + b_m X^m$ este polinomul $h \in K[X]$, $h = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + ... + c_{n+m} X^{n+m}$, unde $c_0 = a_0 + b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, ...,$ $c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + ... + a_0 b_k, ...$
- Are loc relația grad $(f \cdot g) = \text{grad}(f) \cdot \text{grad}(g)$.

Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se determine suma și produsul monoamelor:

a) $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 2X^3, g = 5X^3$; b) $f, g \in \mathbb{C}[X], f = (1 - \mathrm{i}) X^4, g = (1 + \mathrm{i}) X^4$;

c) $f, g \in \mathbb{Z}_5[X], f = \hat{3} X^2, g = 2X^2$.

Soluție

a) $f + g = (2 + 5) X^3 = 7X^3$; $\quad f \cdot g = 2 \cdot 5 X^6 = 10 X^6$;

b) $f + g = (1 - \mathrm{i} + 1 + \mathrm{i}) X^4 = 2X^4$; $\quad f \cdot g = (1 - \mathrm{i})(1 + \mathrm{i}) X^8 = 2X^8$;

c) $f + g = (\hat{3} + 2) X^2 = \hat{0} \cdot X^2$; $\quad f \cdot g = \hat{3} \cdot 2X^4 = \hat{1} \cdot X^4$.

2. Să se determine suma polinoamelor f, g în cazurile:

a) $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 3X^2 + 4X - 3, g = -2X^2 + 5X + 3$;

b) $f, g \in \mathbb{Q}[X], f = 2 + 3X^2 - X^3, g = 7X + X^3$;

c) $f, g \in \mathbb{Z}_7[X], f = 2 + \hat{5} X + \hat{3} X^2, g = \hat{5} + 2X + 4X^2 + X^3$.

Soluție

a) $f + g = (3X^2 + 4X - 3) + (-2X^2 + 5X + 3) = (3 - 2) X^2 + (4 + 5) X - 3 + 3 = X^2 + 9X$;

b) $f + g = (2 + 3X^2 - X^3) + (7X + X^3) = 2 + 3X^2 + 7X + (-1 + 1) X^3 = 2 + 7X + 3X^2$;

c) $$f + g = (2 + \hat{5} X + \hat{3} X^2) + (\hat{5} + 2X + 4X^2 + X^3) = (2 + \hat{5}) + (\hat{5} + 2) X + (\hat{3} + 4) X^2 + X^3 = \\ = \hat{0} + \hat{0} \cdot X + \hat{0} \cdot X^2 + X^3 = X^3.$$

3. Să se efectueze produsul polinoamelor f, g în cazurile:

a) $f, g \in \mathbb{Q}[X], f = 1 - X,\ g = 1 + X + X^2 - X^3$;

b) $f, g \in \mathbb{R}[X], f = 1 + 2X + X^2,\ g = 1 + X - X^2$;

c) $f, g \in \mathbb{Z}_3[X], f = \hat{1} + 2X,\ g = \hat{1} + X + 2X^2$.

Soluţie

a) Avem $f \cdot g = (1 - X)(1 + X + X^2 - X^3) = 1 + X + X^2 - X^3 - X - X^2 - X^3 + X^4 =$
$= 1 - 2X^3 + X^4$;

b) Se obţine: $f \cdot g = (1 + 2X + X^2)(1 + X - X^2) = 1 + X - X^2 + 2X + 2X^2 - 2X^3 + X^2 +$
$+ X^3 - X^4 = 1 + 3X + 2X^2 - X^3 - X^4$.

4. Să se aducă la forma algebrică polinomul:

a) $f = (X + 1)^2 + 2(X - 1)^2 \in \mathbb{R}[X]$;

b) $f = (X - 1)(X^2 + 1) + (X + 2)(X - X^2) \in \mathbb{C}[X]$.

Soluţie

a) Avem $f = X^2 + 2X + 1 + 2(X^2 - 2X + 1) = 3X^2 - 2X + 3$.

b) Avem că $f = (X^3 + X - X^2 - 1) + (X^2 - X^3 + 2X - 2X^2) = -2X^2 + 3X - 1$.

5. Să se determine polinomul $f \in K[X]$, în condiţiile:

a) $f \cdot (X - 1) = X^3 + X - 2,\ K = \mathbb{R}$; b) $f \cdot (2X - 1) = 8X^3 - 1,\ K = \mathbb{Q}$;

c) $(X^2 + X + \hat{1}) \cdot f = X^4 + X^2 + \hat{1},\ K = \mathbb{Z}_3$.

Soluţie

a) Din proprietatea gradelor se obţine că $\text{grad}(f) + 1 = 3$, deci f este polinom de gradul 2.

Fie $f = a + bX + cX^2$. Egalitatea dată se scrie: $(a + bX + cX^2) \cdot (X - 1) = X^3 + X - 2$ sau după efectuarea produsului de polinoame: $cX^3 + (b - c)X^2 + (a - b)X - a = X^3 + X - 2$.

Polinoamele obţinute sunt egale dacă $c = 1,\ b - c = 0,\ a - b = 1$ şi $-a = -2$. Rezultă că $a = 2$, $b = 1,\ c = 1$, deci $f = 2 + X + X^2$.

b) Polinomul f trebuie să aibă gradul 2, deci are loc egalitatea
$(aX^2 + bX + c)(2X - 1) = 8X^3 - 1$. Se obţine, după efectuarea produsului de polinoame:
$2aX^3 + (2b - a)X^2 + (2c - b)X - c = 8X^3 - 1$. Din egalitatea de polinoame se obţin relaţiile
$2a = 8,\ 2b - a = 0,\ 2c - b = 0$ şi $-c = -1$, cu soluţiile $a = 4,\ b = 2, c = 1$, deci $f = 4X^2 + 2X + 1$.

c) Gradul polinomului f trebuie să fie 2, deci $f = aX^2 + bX + c \in \mathbb{Z}_3[X]$. Se obţine egalitatea
$(X^2 + X + \hat{1})(aX^2 + bX + c) = X^4 + X^2 + \hat{1}$ sau după efectuarea produsului
$aX^4 + (a + b)X^3 + (a + b + c)X^2 + (b + c)X + c = X^4 + X^2 + \hat{1}$. Din egalitatea polinoamelor rezultă
că $a = \hat{1}, a + b = \hat{0},\ a + b + c = \hat{1},\ b + c = \hat{0}$ şi $c = \hat{1}$. Astfel, $a = \hat{1},\ b = -a = -\hat{1} = 2,\ c = -b = -2 = \hat{1}$
şi $c = \hat{1}$, deci $f = X^2 + 2X + \hat{1}$.

6. Să se determine polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$, de gradul 1, dacă $(X^2+3X+2)\cdot f+(X^2+1)g=X^2-2X+2$.

Soluţie

Fie $f=aX+b,\ g=cX+d$. Se obţine că $(X^2+3X+2)(aX+b)+(X^2+1)(cX+d)= = X^2-2X+2$ sau după efectuarea produselor: $(a+c)X^3+(3a+b+d)X^2+(2a+3b+c)X+ +2b+d=X^2-2X+2$.

Egalitatea polinoamelor implică: $a+c=0,\ 3a+b+d=1,\ 2a+3b+c=-2,\ 2b+d=2$, cu soluţiile $a=b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{2},\ d=3$. Aşadar $f=-\frac{1}{2}X-\frac{1}{2},\ g=\frac{1}{2}X+3$.

Exerciţii şi probleme propuse

1. Să se efectueze suma şi diferenţa următoarelor polinoame:

a) $f,g\in\mathbb{Q}[X], f=X^3+2X^2-X+1, g=-2x^2-1$;

b) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=-X^5+2X^3-3, g=X^5-2X^3+3$;

c) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=4-2X+X^3, g=-2X^2-X^3$;

d) $f,g\in\mathbb{C}[X], f=iX^3+(1+2i)X^2-(1-i)X-i, g=-iX^3+(1-2i)X^2-(1+i)X+i$;

e) $f,g\in\mathbb{Z}_5[X], f=2X^2+X+\hat{3}, g=\hat{3}X^2+2X+2$.

2. Calculaţi $f+g-h$, în următoarele cazuri:

a) $f,g,h\in\mathbb{R}[X], f=X^5-2X^3+3X-1, g=X^4+2X^3+4X^2-1, h=X^3-2X^2-2$;

b) $f,g,h\in\mathbb{C}[X], f=X^4-iX+1+i, g=-X^4-i, h=-iX+1$;

c) $f,g,h\in\mathbb{Z}_3[X], f=X^3+2X^2+2, g=X^2+\hat{1}, h=2X+2$.

3. Să se determine $f+g, -f, -g$ şi $f-g$ dacă:

a) $f,g\in\mathbb{Q}[X], f=\frac{3}{4}-2x+4X^3, g=-1+\frac{5}{2}X-3X^2$;

b) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=2X^4-3X^2-2X+1, g=2X^4+3X^2-2X-1$;

c) $f,g\in\mathbb{C}[X], f=X^3-iX^2+(1+i)X-3i, g=iX^2-(1-i)X+2i$.

d) $f,g\in\mathbb{Z}_5[X], f=X^2+2X+\hat{3}, g=\hat{3}X+\hat{1}$.

4. Să se efectueze produsul polinoamelor f şi g în cazurile:

a) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=X+1, g=X^3-X^2+X-1$;

b) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=X^2-X+1, g=X+2$;

c) $f,g\in\mathbb{R}[X], f=X^3-X+1, g=X^3+X-1$;

d) $f,g\in\mathbb{C}[X], f=iX^2+(1+i)X-1, g=-iX+1$;

e) $f,g\in\mathbb{Z}_5[X], f=X^3+2X+\hat{3}, g=X^2+\hat{3}$.

5. Să se calculeze:

a) $5f-3g$, dacă $f,g\in\mathbb{C}[X]$, $f=(X-2)^2+(X+2)^2$ şi $g=(X+2i)^2+(X-2i)^2$;